Cognome - Nome - matricola: ....

PRIMO Compitino di Fisica Matematica due
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 18 maggio 2012
sottolineare: **[vecchio ordinamento 509] [nuovo ordinamento 270]**

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito.
CONSEGNATE UN'UNICA VERSIONE DEL COMPITO (NIENTE BRUTTE COPIE)

Esercizio

Una lamina rettangolare con lati $a > b$ omogenea e di massa m è vincolata nel piano Oxy del sistema di rif. non-inerziale $Oxyz$ che ruota uniformemente con velocità angolare di trascinamento $\underline{\Omega} = \Omega\,\hat{y}$. Il baricentro G della lamina è vincolato su di una guida circolare di raggio R centrata in O del piano Oxy. Si considerino quali coordinate Lagrangiane l'ascissa x del baricentro G della lamina e l'angolo orientato antiorario ϑ dalla semiretta positiva x al lato di lunghezza maggiore a. S'intende studiare il sistema meccanico solo per $y_G < 0$. Si consideri un sistema principale d'inerzia $GXYZ$ associato alla lamina con X parallelo a b, Y parallelo ad a e Z parallelo a z.

Determinare tutti gli equilibri al variare di $\Omega > 0$; studiarne la stabilità, al variare di $\Omega > 0$, solo per gli equilibri in cui vale $x = 0$.

Determinare le pulsazioni di Piccola Oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

Teoria

• Sia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ con $\nabla f(0) = 0$ e $\nabla^2 f(0) :\ def.\ pos.$
1] Si consideri il sistema dinamico (del **primo** ordine in $\mathbb{R}^m$):

$$\dot{x} = -\nabla f(x)$$

La configurazione $x = 0$ è d'equilibrio? è stabile? è vero che è pure asintoticamente stabile? determinare una funzione di Lyapunov. Motivare in dettaglio.

2] Si consideri il sistema dinamico (del **secondo** ordine in $\mathbb{R}^m$):

$$\ddot{x} = -\nabla f(x)$$

La configurazione $x = 0$ è d'equilibrio? è stabile? è anche asintoticamente stabile? determinare una funzione di Lyapunov. Motivare in dettaglio.

• Teorema di Conservazione dell'Energia: Enunciato e dimostrazione.

Soluzione (traccia):

Teoria

1) $x = 0$ è p.to attrattivo, equilibrio stabile iperbolico dal fatto che gli autov. di $-\nabla^2 f(0)$ sono tutti strettamente negativi. La derivata di Lie di f, $L_{-\nabla f} f = -|\nabla f|^2 < 0$ per $x \neq 0$, e dunque $W(x) = f(x) - f(0)$ è funzione di Lyapunov per la stab. asintotica: f è locamente def. positiva e la sua derivata di Lie è definita negativa, localmente e strettamente.

2) È un sistema meccanico conservativo: al primo ordine è

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\nabla f(x) \end{cases}$$

$x = 0$ per $v = 0$ è un equilibrio stabile, semplicemente stabile, e la funzione di Lyapunov è $W(x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + f(x) - f(0)$; non è iperbolico, in generale sono dei centri.

Esercizio

Prendiamo un sistema principale d'inerzia associato alla lamina G, X, Y, Z con X parallelo a b, Y parallelo a a e Z parallelo a z. In tale base l'op. d'inerzia è

$$\mathcal{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}^g(x, \vartheta) = -mg\sqrt{R^2 - x^2}$$

Nella base G, X, Y, Z il versore indicante la direzione dell'asse di rotazione y è

$$n(\vartheta) = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}^{centrif}(x, \vartheta) = -\frac{\Omega^2}{2}\left(mx^2 + \langle n(\vartheta), \mathcal{I}_G\, n(\vartheta)\rangle\right) = -\frac{\Omega^2}{2}(mx^2 + \frac{m}{12}\left(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta\right))$$

Le forze di Coriolis producono delle componenti Lagr. di Sollecitazione nulle dato che si tratta di valutare il lavoro e sommare contributi, p.to materiale per p.to materiale della lamina, che è sempre prodotto scalare di vettori complanari.

$$T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \left(\frac{x\dot{x}}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{m}{12}(a^2 + b^2)\dot{\vartheta}^2$$

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{U}^{tot}_{,x} &= -mx\left(-\tfrac{g}{\sqrt{R^2-x^2}} + \Omega^2\right) \\ 0 = \mathcal{U}^{tot}_{,\vartheta} &= \tfrac{m\Omega^2}{12}(a^2 - b^2)\sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned}$$

Se Ω è piccolo, cioè $\Omega^2 < \frac{g}{R}$, esiste la sola soluzione $x_E = 0$ della prima equ. e la seconda dà $\vartheta_E = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Lo studio dell'Hessiana

$$\nabla^2\mathcal{U}^{tot}(x, \vartheta) = \begin{pmatrix} m(\frac{g}{R} - \Omega^2) & 0 \\ 0 & \frac{m\Omega^2(a^2-b^2)}{12}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{pmatrix}$$

mostra che l'unico p.to stabile è $(0, 0)$ (e così pure per simmetria $(0, \pi)$) . Se invece $\Omega^2 > \frac{g}{R}$ allora ci sono pure due nuove soluzioni in x. In tal caso $(0, 0)$

diventa instabile. Nel caso $\Omega^2 < \frac{g}{R}$ le fr. di piccola oscillazioni attorno a $(0,0)$ sono:

$$0 = \det\left[\begin{pmatrix} m(\frac{g}{R}-\Omega^2) & 0 \\ 0 & \frac{m\Omega^2(a^2-b^2)}{12} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{pmatrix}\right]$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}-\Omega^2}, \quad \omega_2 = \Omega\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$